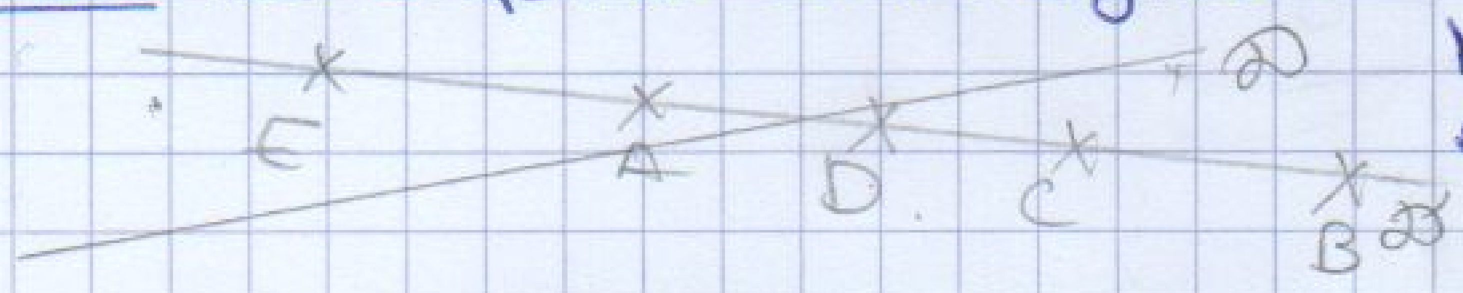
dem : par 5 points passe une conique.

leçons : 162, 171.
ref : Isenmann et Pecatte p93.

thm : Soient A, B, C, D, E des points distincts du plan.
Il existe une conique qui passe par ces 5 points.
De plus, elle est unique ssi 4 des 5 points sont non alignés.

dem :

cas 1 : les 5 points sont alignés.

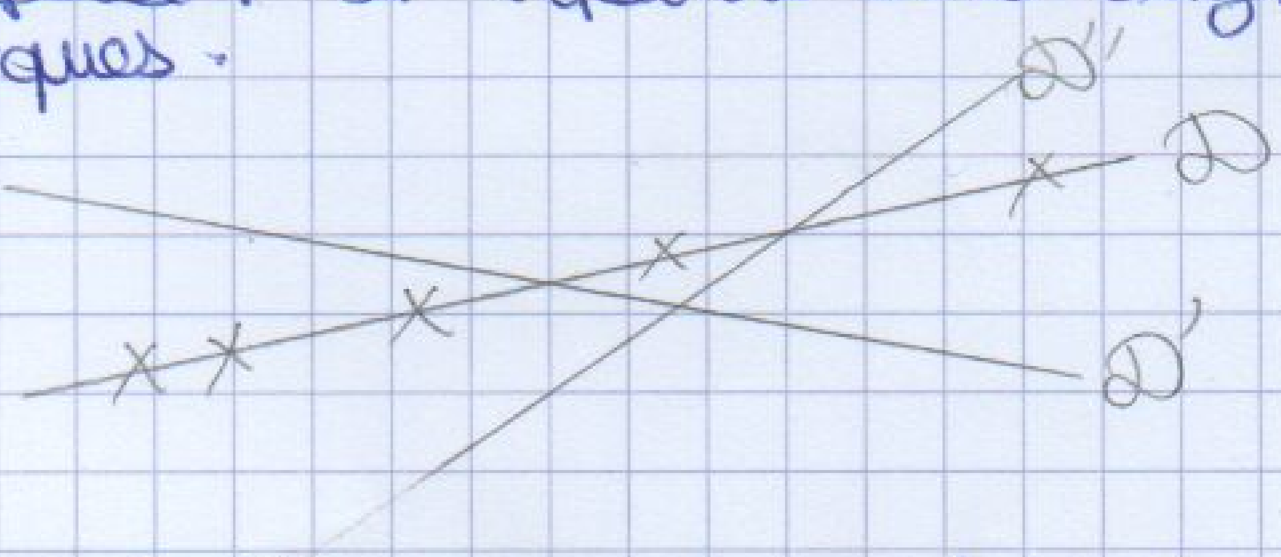


N'importe quelle droite intersectant (AB) donne une conique. $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

cas 2 : les 5 points ne sont pas alignés.
OPS A, B, C non alignés. A, B, C forment donc un repère barycentrique et on note X, Y, Z les coordonnées barycentrique dans ce repère.
L'équation d'une conique dans ce repère est une forme quadratique :
$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + pYZ + qXZ + rXY = 0$$
Si $A(1,0,0)$ appartient à cette conique, on a : $a = 0$.
De même si B (resp. C) passe par cette conique $b = 0$ (resp. $c = 0$).
Une conique passant par A, B, C, D, E a donc une équation de la forme :
$$pYZ + qXZ + rXY = 0 \quad (*)$$
où $(S) \begin{cases} p\, y_1 z_1 + q\, x_1 z_1 + r\, x_1 y_1 = 0 \\ p\, y_2 z_2 + q\, x_2 z_2 + r\, x_2 y_2 = 0 \end{cases}$ avec $E = (x_1, y_1, z_1)$, $D = (x_2, y_2, z_2)$.

(S) est un système à 3 inconnues et 2 équations, il admet donc une solution non nul.
Ceci montre l'existence.

$\Rightarrow$] Contraposée : si 4 points sont alignés, il existe une infinité de telles coniques.



$\mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}''$ sont 2 telles coniques.

$\Leftarrow$] Contraposée. Supposons qu'il existe plusieurs conique passant par ces 5 points.
Comme (p, q, r) et $(\lambda p, \lambda q, \lambda r)$ définissent la même conique ($\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$) forcément l'espace de solution de (S) est de dimension 2.
car $n - r =$ dim de l'ensemble des sol° — Le rang du système est donc 1 et tous ses mineurs sont nuls

• $\begin{vmatrix} y_1 z_1 & x_1 z_1 \\ y_2 z_2 & x_2 z_2 \end{vmatrix} = 0 \iff z_1 z_2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$

$\iff z_1 z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$

$\iff z_1 z_2 \det(C, D, E) = 0.$

De même, on trouve $x_1 x_2 \det(A, D, E) = 0$, $y_1 y_2 \det(B, D, E) = 0$.

• Supposons par l'absurde $A \notin (DE)$ et $B \notin (DE)$.
$\det(A, D, E) \neq 0 \Rightarrow x_1 x_2 = 0.$

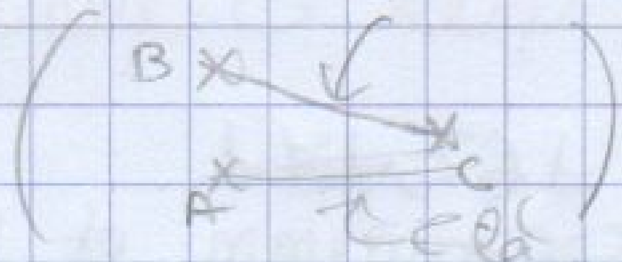
$\det(B, D, E) \neq 0 \Rightarrow y_1 y_2 = 0$. (1).

OPS $x_1 = 0$

Or $D \neq B$ et $D \notin C \Rightarrow y_1 z_1 \neq 0$.

Donc $y_1 \neq 0$ et $y_2 = 0$ par (1)

$x_1 = 0 \Rightarrow D$ sur (BC)



pour moi pour comprendre.

$E \neq A$, $E \notin C$ $x_2 z_2 \neq 0$.

(S) se réécrit alors : $\begin{cases} p y_1 z_1 = 0 \\ q x_2 z_2 = 0 \end{cases}$ ABSURDE ! car de rang 2. (oui, alors que par hyp rg 1)

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} p y_1 z_1 = 0 \\ + q x_2 z_2 = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ rg 2. car $y_1 z_1 \neq 0$ et $x_2 z_2 \neq 0$.

$A \in (DE)$ ou $B \in (DE)$.

- OPS $A \in (DE)$. On montre de même que $B \in (DE)$ ou $C \in (DE)$ et on a ainsi 4 points alignés.